۱) الف) به ازای کدام مجموعه از $a$ نمودار $y=(a-1)x^2+2\sqrt{2}x+a$ همواره بالای محور $x$ها است؟

ب) معادله‌ی خط محور تقارن سهمی $-2x^2+6x+1$ را تعیین کنید.

پاسخ:

الف) برای این که یک سهمی همواره بالای محور $x$ها باشد در معادله‌ی آن ضریب $x^2$ باید مثبت باشد (تا سهمی رو به بالا باشد) و همین طور $\Delta$ باید منفی باشد (تا سهمی در هیچ نقطه‌ای محور $x$ها را قطع نکند.)

$a-1>0 \longrightarrow a>1$

$$\Delta<0 \longrightarrow 8-4a(a-1)<0$$
$$8-4a^2+4a<0$$
$$a^2-a-2>0$$
$$(a+1)(a-2)>0 \longrightarrow a<-1 \text{ یا } a>2$$

اشتراک جواب‌ها $\longrightarrow \boxed{a>2}$

ب) محور تقارن سهمی خطی عمودی به طول رأس سهمی است. کافی است طول رأس سهمی را پیدا کنیم:

$$x_s=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{-4}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

معادله خط $\longrightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}}$

---

۲) تعداد ریشه‌های معادله‌ی زیر را بیابید.　$x^4-4x^2-12=0$

پاسخ:

ابتدا تغییر متغیر می‌دهیم تا معادله به معادله‌ی درجه دوم تبدیل شود.

$t=x^2 \longrightarrow t^2-4t-12=0$

$$(t+2)(t-6)=0 \begin{cases} t=-2 & x^2=-2 \times \\ t=6 & x^2=6 \begin{cases} x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6} \end{cases} \end{cases}$$

---

۳) ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=2-\sqrt{x-1}$ را یافته و دامنه‌ای از $f^{-1}$ را اعلام کنید که این دو تابع وارون یکدیگرند.

پاسخ:

برای یافتن وارون تابع باید $x$ را بر حسب $y$ به دست آوریم.

CamScanner

CamScanner

$y = 2 - \sqrt{x-1}$

$2 - y = \sqrt{x-1} \longrightarrow 2 - y \geq 0 \quad y \leq 2$ : برد تابع $f$ یا دامنه‌ی تابع $f^{-1}$

بتوان ۲

$y^2 - 4y + 4 = x - 1 \qquad x = y^2 - 4y + 5$

$\boxed{f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (x \leq 2)}$ حالا برای نوشتن ضابطه‌ی نهایی تابع $f^{-1}$ جای $x$ و $y$ را عوض می‌کنیم

---

۴) اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $fog(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشد، $g(1)$ را بیابید.

پاسخ:

$g(1) = a$

طبق ضابطه $fog(x)$ $\longrightarrow fog(1) = f(a) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$

طبق ضابطه $f(x)$ $\longrightarrow f(a) = \frac{a+1}{a-1}$

$\Longrightarrow \frac{a+1}{a-1} = \frac{3}{2} \qquad 2a + 2 = 3a - 3 \qquad \boxed{a = 5}$

---

۵) دامنه‌ی تابع زیر را بیابید. $y = \sqrt{2 - \log_3(x+1)}$

پاسخ: عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد. $\longleftarrow$ $2 - \log_3(x+1) \geq 0$

$\log_3(x+1) \leq 2$

$\log_3(x+1) \leq \log_3 9 \qquad x + 1 \leq 9 \qquad x \leq 8$

در عبارت $\log_3 x+1$، $x+1$ باید بزرگ‌تر از صفر باشد $\longleftarrow$ $x + 1 > 0 \qquad x > -1$

اشتراک دو شرط $\Longleftarrow$ $-1 < x \leq 8$ یا $x \in (-1, 8]$ یا $\boxed{D_f = (-1, 8]}$

---

۶) از تساوی $\log(2x-1) + \frac{1}{2}\log x^2 = \log 3$، مقدار لگاریتم $\frac{x}{3}$ در مبنای ۴ کدام است؟

$\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$

پاسخ:

$\log(2x-1) + \frac{1}{2}\log x^2 = \log 3$

$\log(2x-1) + \log x = \log 3$

$\log x(2x-1) = \log 3$

$2x^2 - x = 3$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$(x+1)(2x-3) = 0$

$x = -1$ × در دامنه نیست

$x = \frac{3}{2} \qquad \log_4 \frac{x}{3} = \log_4 \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

CamScanner

CamScanner

۷) اگر $\tan 25 = 0/7$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \frac{2\sin 115^\circ - \cos 245^\circ}{\cos 205^\circ + \sin(-25^\circ)}$$

پاسخ :

$$A = \frac{2\sin(90+25) - \cos(270-25)}{\cos(180+25) + \sin(-25)} = \frac{2\cos 25 - (-\sin 25)}{-\cos 25 - \sin 25} = \frac{2\cos 25 + \sin 25}{-\cos 25 - \sin 25}$$

$$\xrightarrow[\text{می کنیم}\ \cos 25]{\text{صورت و مخرج را تقسیم بر}} \frac{2\frac{\cos 25}{\cos 25} + \frac{\sin 25}{\cos 25}}{-\frac{\cos 25}{\cos 25} - \frac{\sin 25}{\cos 25}} = \frac{2+\tan 25}{-1-\tan 25} = \frac{2+0/7}{-1-0/7} = \frac{2/7}{-1/7} = -\frac{27}{17}$$

---

۸) ثابت کنید :

$$\frac{4\cos 2x}{\tan x + \cot x} = \sin 4x$$

پاسخ : از سمت چپ شروع می کنیم و آن را به عبارت سمت راست تبدیل می کنیم .

$$\frac{4\cos 2x}{\tan x + \cot x} = \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{4(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}}$$

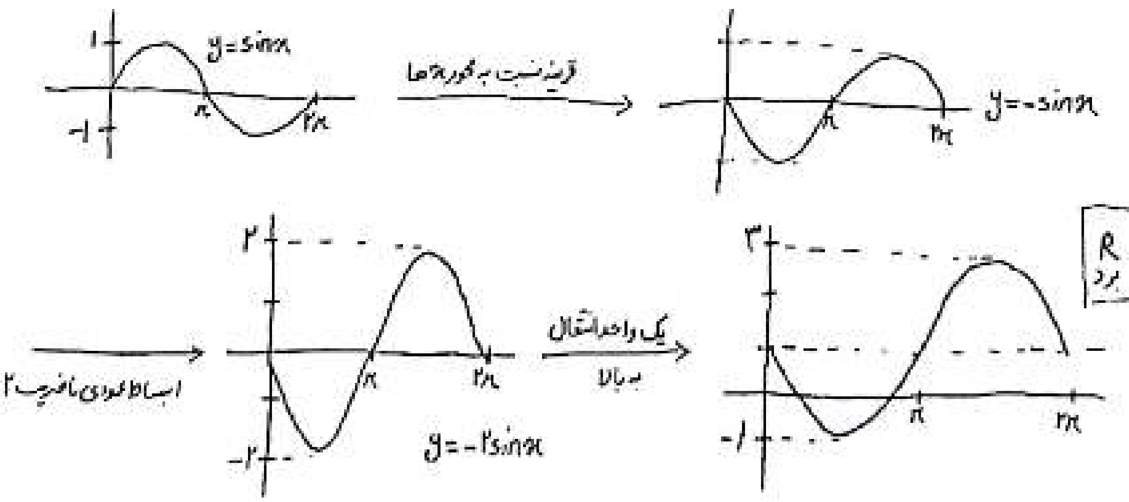
$$= \frac{4(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\frac{1}{\cos x \sin x}} = 4\cos 2x \cdot \cos x \sin x = 2\cos 2x \cdot 2\sin x\cos x = 2\cos 2x \sin 2x$$

$$= \boxed{\sin 4x}$$

---

۹) تابع $y = -2\sin x + 1$ را در محدوده‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کرده و برد آن را بیابید.

پاسخ :




$$R_{\text{برد}} = [-1, 3]$$

۱۰) حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{4})}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\cos^2(x+\frac{\pi}{4})} \overset{*}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\frac{\cos 2(x+\frac{\pi}{4})+1}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - 1}{\frac{-\sin 2x + 1}{2}} = \boxed{-2}$$

$$* \quad \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \qquad \cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

پاسخ:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3} \times \frac{\sqrt{4x+1}+3}{\sqrt{4x+1}+3} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4x+1-9}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)}(\sqrt{4x+1}+3)}{4\cancel{(x-2)}} = \frac{3\times 6}{4} = \frac{9}{2} = \boxed{4{,}5}$$

---

۱۱) وجود حد در تابع زیر را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to 1} x[x] + 2[-x]$$

پاسخ: برای این که حد موجود باشد باید حد راست و چپ در نقطهٔ ۱ موجود و برابر باشند.

$$\lim_{x\to 1^+} x[x] + 2[-x] = \lim_{x\to 1^+} x - 4 = 1 - 4 = -3$$

$$\lim_{x\to 1^-} x[x] + 2[-x] = \lim_{x\to 1^-} 0 + (-2) = -2$$

حدهای راست و چپ در $x=1$ برابر نیستند پس تابع در این نقطه حد ندارد.

---

۱۲) به ازای کدام $a$ تابع زیر پیوستگی دارد؟

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{[x]\sin x}{3x - |x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

پاسخ: برای این که تابع پیوسته باشد باید مقدار و حد تابع در نقطهٔ صفر برابر باشند.

از آن جا که در $x=0$ حدهای راست و چپ برابر نیستند پس تابع در این نقطه حد ندارد و به ازای هیچ مقداری از $a$ پیوسته نیست.

$$f(0) = a$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{0\times\sin x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-\sin x}{4x} \overset{*}{=} -\frac{1}{4} \qquad * \lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

CamScanner

CamScanner